

FÍSICA (INFORMÁTICA DE GESTIÓN)

Febrero de 2004. Primera vuelta

SOLUCIONES

PROBLEMA 1.1.1

En el interior de un cubo de lado L existen cuatro cargas sobre una circunferencia de radio $L/4$, dispuestas como muestra la figura P1.1.1.

Aplicando el teorema de Gauss calcular el flujo del campo electrostático \mathbf{E} a través del cubo.

Teniendo en cuenta los resultados que debe obtener en el apartado anterior, explicar de forma cualitativa si el campo electrostático es o no nulo en todos los puntos de la superficie del cubo.

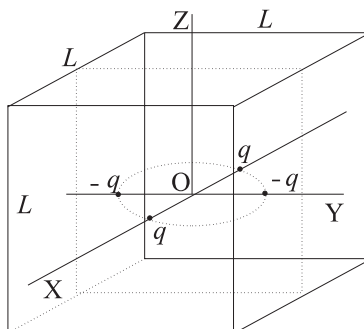


Figura P1.1.1

Solución

El teorema de Gauss en nuestro caso se expresa matemáticamente de la forma siguiente:

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_o} \sum_1^4 q_i$$

como la suma de las cargas encerradas por la superficie del cubo es:

$$\sum_1^4 q_i = -q + q - q + q = 0$$

se deduce que,

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

Es decir, el flujo a través de la superficie del cubo es nula.

Que el flujo total sea nulo no quiere decir que lo sea el campo en todos los puntos de la superficie del cubo.

Si nos fijamos en la cara perpendicular al eje Y en la parte derecha del cubo, vemos que la carga $-q$ más próxima a la cara está a una distancia del centro de la cara cuyo cuadrado es $d_1 = L/4$, mientras que las dos cargas positivas están a una distancia

$$d_2 = \left(\frac{L^2}{4} + \frac{L^2}{16} \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{5}{16}} L = \frac{\sqrt{5}}{4} L$$

La otra carga negativa está a una distancia $d_3 = 3L/4$.

Dada la simetría de la distribución de cargas en el punto central de la cara considerado sólo queda la componente del campo en la dirección del eje Y, que es,

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left(-\frac{q}{(L/4)^2} - \frac{q}{(3L/4)^2} + 2\frac{q}{\left(\frac{\sqrt{5}}{4}L\right)^2} \cos \alpha \right)$$

Teniendo en cuenta que α es el ángulo que forman el eje Y y la recta que une el punto considerado con la posición de la carga q ,

$$\cos \alpha = \frac{L/4}{\frac{\sqrt{5}}{4}L} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left(-\frac{q}{(L/4)^2} - \frac{q}{(3L/4)^2} + 2\frac{q}{\left(\frac{\sqrt{5}}{4}L\right)^2} \frac{\sqrt{5}}{5} \right)$$

$$E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \left(-\frac{160}{9} \frac{1}{L^2} + \frac{32\sqrt{5}}{25} \frac{1}{L^2} \right)$$

que es distinto de cero.

Es decir, el flujo total es nulo pero no el campo en todos los puntos.

PROBLEMA 1.1.2

Dado el circuito indicado en la figura 1.1.2, calcular el circuito equivalente Thévenin visto desde los bornes AB. Obtener el valor de la resistencia R que debemos aplicar a los bornes AB para que la potencia transferida a dicha resistencia sea máxima.

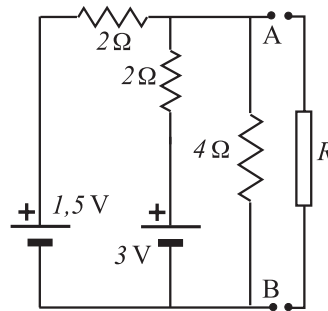


Figura P1.1.2

Solución

Para obtener el circuito equivalente Thévenin debemos calcular en primer lugar la diferencia de potencial entre los puntos (bornes) A B.

El sistema de ecuaciones que corresponde a las mallas, suponiendo las corrientes en el sentido horario es:

$$\begin{aligned} 1,5 - 3 &= 4I_1 - 2I_2 \\ 3 &= -2I_1 + 6I_2 \end{aligned}$$

Simplificando el sistema queda

$$\begin{aligned} -1,5 &= 4I_1 - 2I_2 \\ 3 &= -2I_1 + 6I_2 \end{aligned}$$

Resolviendo por el método de Cramer,

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} -1,5 & -2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}} = -\frac{3}{20} ; \quad I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -1,5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{9}{20}$$

La tensión entre A B será,

$$V_{AB} = 4I_2 = 4 \cdot \frac{9}{20} = \frac{9}{5} = 1,8 \text{ voltios (V)}$$

Para obtener la resistencia equivalente Thévenin cortocircuitamos las fuentes y calculamos la resistencia que se ve desde AB

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

Por tanto,

$$R_e = \frac{4}{5} = 0,8 \text{ } \Omega$$

El circuito equivalente estará formado por un generador E_o de 1,8 V en serie con una resistencia R_e de 0,8 Ω .

Para que la potencia transferida sea máxima $R = R_e = 0,8 \text{ } \Omega$.

PROBLEMA 1.1.3

El diodo luminoso (fotoemisor) D indicado en la figura 1.1.3 tiene las siguientes características: Tensión umbral de conducción 1,5 V , resistencia equivalente serie 100 Ω .

Teniendo en cuenta el circuito equivalente del diodo, calcular la diferencia de potencial entre los puntos AB cuando el conmutador S está en la posición 1. Repetir el mismo cálculo cuando el conmutador está en la posición 2.

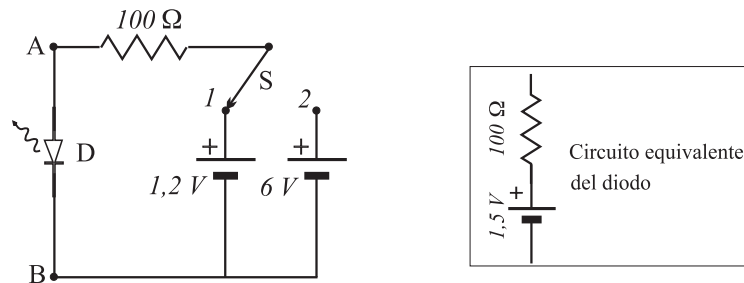


Figura P1.1.3

Solución

Es un problema similar al P13.2, página 425, del libro *Física para informática* de López y Montoya.

1)

Cuando el conmutador está en la posición 1 la tensión aplicada al diodo no supera la tensión umbral $1,2 < 1,5$, por tanto no pasa corriente por el circuito y como consecuencia no hay caída de tensión en la resistencia de 100 Ω que une la pila con el diodo. En conclusión,

$$V_{AB} = 1,2 \text{ V}$$

que es la tensión de la pila.

2)

Con el conmutador en la posición 2 se supera la tensión umbral y en consecuencia pasa corriente por el circuito.

La ecuación del circuito, sustituyendo el diodo por su circuito equivalente, es,

$$6 - 1,5 = (100 + 100) I$$

$$I = \frac{4,5}{200} = 0,0225 \text{ A}$$

La tensión en los bornes del diodo es,

$$V_{AB} = 6 - 100 I = 6 - 2,25 = 3,75 \text{ V}$$

$$V_{AB} = 3,75 \text{ V}$$

FÍSICA (INFORMÁTICA DE GESTIÓN)

Febrero de 2004. Segunda vuelta

SOLUCIONES

PROBLEMA 1.2.1

Dos cargas están situadas como muestra la figura P1.2.1, q en el punto $(L, 0)$ y $-q$ en $(0, L)$.

Calcular el campo eléctrico en los puntos O $(0, 0)$ y P (L, L) .

Calcular la diferencia de potencial entre O y P y explicar el resultado obtenido.

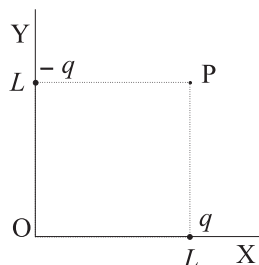


Figura P1.2.1

Solución

1) *Cálculo del campo eléctrico*

Para calcular el campo eléctrico en los puntos O y P utilizamos la relación:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \sum_1^2 \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}$$

En el punto O

Los vectores de posición son:

$$\mathbf{r} = 0 \quad ; \quad \mathbf{r}_1 = L\mathbf{u}_x \quad ; \quad \mathbf{r}_2 = L\mathbf{u}_y$$

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = -L\mathbf{u}_x \quad ; \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}_2 = -L\mathbf{u}_y \quad ; \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2| = L$$

Como a \mathbf{r}_1 le corresponde la carga q y a \mathbf{r}_2 la $-q$, el campo eléctrico será,

$$\mathbf{E}(O) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left(\frac{q(-L\mathbf{u}_x)}{L^3} + \frac{-q(-L\mathbf{u}_y)}{L^3} \right)$$

$$\mathbf{E}(O) = \frac{q}{4\pi\epsilon_o L^2} (\mathbf{u}_y - \mathbf{u}_x)$$

En el punto P

Los vectores de posición son:

$$\mathbf{r} = L(\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y) \quad ; \quad \mathbf{r}_1 = L\mathbf{u}_x \quad ; \quad \mathbf{r}_2 = L\mathbf{u}_y$$

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = L\mathbf{u}_y \quad ; \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}_2 = L\mathbf{u}_x \quad ; \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2| = L$$

Como a \mathbf{r}_1 le corresponde la carga q y a \mathbf{r}_2 la $-q$, el campo eléctrico será,

$$\mathbf{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left(\frac{q(L\mathbf{u}_y)}{L^3} + \frac{-q(L\mathbf{u}_x)}{L^3} \right)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{P}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_o L^2} (\mathbf{u}_y - \mathbf{u}_x)$$

De los cálculos anteriores se deduce que el campo eléctrico tiene el mismo módulo dirección y sentido en los dos puntos.

2) Diferencia de potencial entre los puntos O y P

Para obtener la d d p entre O y P el camino más corto es calcular el potencial en cada punto, ya que una de las principales propiedades del campo electrostático es que la diferencia de potencial entre dos puntos no depende del camino utilizado para calcular el trabajo por unidad de carga desde un punto a otro.

Potencial en O

Utilizamos los valores de los vectores de posición indicados en el apartado anterior.

$$V(\mathbf{O}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \sum_1^2 \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left(\frac{q}{L} - \frac{q}{L} \right) = 0$$

Potencial en P

Operando de forma análoga,

$$V(\mathbf{P}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left(\frac{q}{L} - \frac{q}{L} \right) = 0$$

Por tanto la diferencia de potencial entre los dos puntos es cero.

Los puntos O y P están al mismo potencial, por tanto se ubican sobre una equipotencial. Sobre dicha equipotencial el campo es perpendicular a dicha línea o superficie y en consecuencia $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$, por tanto no hay variación de potencial a lo largo de la línea o superficie equipotencial.

PROBLEMA 1.2.2

En la zona del espacio correspondiente a $y > 0$, existe un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B_o \mathbf{u}_x$. Para $y < 0$ no existe campo magnético.

Una partícula de carga q y masa m incide en el origen de coordenadas O con una velocidad $\mathbf{v} = v_o \mathbf{u}_y$. Ver la figura P1.2.2.

Calcular la distancia ($y > 0$), medida desde O, hasta donde penetra la partícula.

Encontrar las coordenadas del punto por donde sale la partícula.

$m = 6,4 \times 10^{-27}$ Kg. ; $v_o = 10^6$ m/s ; $B_o = 1$ T = 1 Wb/m²; $q = 6,4 \times 10^{-19}$ C.

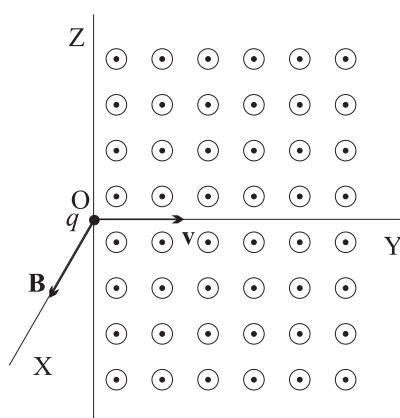


Figura P1.2.2

Solución

1) Penetración de la carga

Si tenemos en cuenta el apartado 6.4 y el ejemplo 6.3, página 226 de libro de *Física para informática* (López y Montoya), sabemos que la trayectoria de la carga q dentro de un campo magnético uniforme es una circunferencia. El radio de dicha circunferencia viene dado por,

$$R = \frac{mv}{qB}$$

La penetración de la carga es igual al radio de la trayectoria. Ésta es tangente al eje Y en el punto O y su centro se sitúa en el punto $z = -R$, $x = 0$, $y = 0$.

Con los datos indicados en el problema,

$$y_d = R = \frac{6,4 \times 10^{-27} \times 10^6}{6,4 \times 10^{-19} \times 1} = 10^{-2} \text{ m} = 1 \text{ cm}$$

2) *Punto de salida*

Como describe una circunferencia de radio R y centro en $(0, 0, -R)$, el punto de salida es el diametralmente opuesto a O, es decir, el punto de coordenadas,

$$P = (0, 0, -2R) = (0, 0, -2 \times 10^{-2} \text{ m})$$

PROBLEMA 1.2.3

Dado el circuito que muestra la figura P1.2.3, calcular el módulo y la fase de la corriente que circula por la inductancia L .

$$\omega = 10^6 \text{ s}^{-1} ; L = 10^{-3} \text{ H} ; C = 10^{-9} \text{ F} ; R = 10^3 \Omega$$

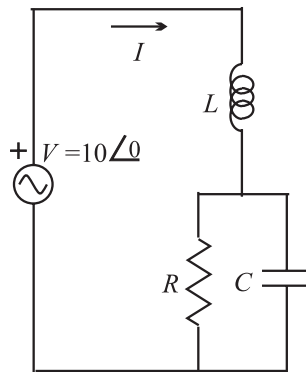


Figura P1.2.3

Solución

La impedancias de los distintos componentes son:

$$X_L = \omega L = 10^6 \times 10^{-3} = 10^3 \rightarrow \mathbf{Z}_1 = j10^3$$

$$X_C = -\frac{1}{\omega C} = -\frac{1}{10^6 \times 10^{-9}} = -10^3 ; R = 10^3$$

$$\frac{1}{\mathbf{Z}_2} = \frac{1}{jX_C} + \frac{1}{R} = \frac{R + jX_C}{jRX_C}$$

$$\mathbf{Z}_2 = \frac{jRX_C}{R + jX_C} = \frac{j10^3 \times (-j10^3)}{10^3 - j10^3} = \frac{-j10^3}{1 - j}$$

$$\mathbf{Z}_2 = 500(1 - j)$$

La impedancia total que se aplica al generador, dado que \mathbf{Z}_1 y \mathbf{Z}_2 están en serie, es:

$$\mathbf{Z}_T = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 = 500(1 - j) + j10^3 = 500(1 + j)$$

La corriente que circula por la inductancia L es:

$$\mathbf{I} = \frac{10}{500(1 + j)} = \frac{(1 - j)}{100}$$

Por tanto el módulo de la corriente es,

$$I = 10^{-2}\sqrt{2}$$

y la fase con respecto a la tensión que se toma como referencia,

$$\tan \theta = \frac{-1}{1} = -1 \quad \rightarrow \quad \theta = -\frac{\pi}{4} = -45^\circ$$